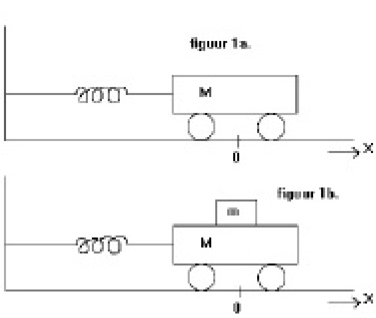
Tentamen Golven en Optica (19/3/98, 9.00-12.00, 5113.0202)

Begin <u>iedere opgave</u> op een <u>apart vel papier</u> en zet daarop je naam. Vermeld op het eerste vel je naam, geboortedatum, studentnummer, studierichting, eerste jaar van inschrijving, adres met postcode, en het aantal ingeleverde bladen.

Vraagstukken 1 en 2 gelden als AN3a, uitsluitend voor ouderejaars die AN3b al gehaald hebben (vermeld dan ‘AN3a’ op het eerste vel); vraagstukken 3 en 4 gelden als AN3b, uitsluitend voor ouderejaars die AN3a al gehaald hebben (vermeld dan ‘AN3b’ op het eerste vel); alle overigen kunnen uitsluitend een ongedeeld tentamen (vraagstukken 1 t/m 4) doen.
(Tentamentijd voor iedereen 9.00-12.00; puntenverdeling: 1=20[3+4+5+3+5], 2=20[6+7+7], 3=20[5+5+6+4], 4=20[5+5+5+5])

Vraagstuk 1



Een wagentje met massa M is d.m.v. een veer (veerconstante k) gekoppeld aan een muur (zie figuur). Het wagentje kan *wrijvingsloos* over de vloer bewegen.

a. Schrijf de bewegingsvergelijking op voor het karretje dat een harmonische beweging maakt om de evenwichtspositie (x=0).

Op het wagentje wordt nu een massa m gelegd. Bij een bepaalde trillingsamplitude van het karretje zal die massa gaan schuiven.

b. Bij welke amplitude zal dat gebeuren? Ter herinnering: de wrijvingskracht tussen twee oppervlakken (parallel aan het wrijvings-oppervlak en werkend tegen de bewegingsrichting in) is gelijk aan F_w=mN, waarbij N de normaal-kracht (d.w.z. loodrecht op het wrijvingsoppervlak) is en m de wrijvingscoëfficiënt.

Het systeem wordt vervolgens *aangedreven* door een sinusoïdale kracht, $F_0 \cos(w\, t)$.

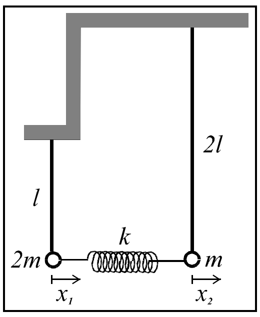
c. Schrijf de bewegingsvergelijking op voor het aangedreven systeem en bereken de trillingsamplitude als functie van de aandrijffrequentie w. Ga ervan uit dat de massa m stil blijft liggen op de massa M.

d. De aandrijffrequentie wordt nu langzaam verhoogd. Bij welke frequentie zal de massa m gaan schuiven?

De massa m wordt nu weer van het wagentje afgehaald. Men wil bekijken hoe het wagentje *begint* te bewegen als het wordt aangedreven. Op t=0 bevindt het wagentje zich in de evenwichtspositie (x=0) en staat het stil (v=0).

e. Schrijf de bewegingsvergelijking op voor het wagentje dat vanuit de evenwichtstoestand begint te bewegen door de aandrijving met een sinusoïdale kracht (aandrijffrequentie w). Geef kwalitatief aan hoe deze vergelijking kan worden opgelost, uit welke twee delen de oplossing bestaat, en hoe die fysisch te interpreteren zijn gegeven de beginvoorwaarden.

Vraagstuk 2



Een slinger met een lengte l waar een massa 2m aan hangt is door middel van een veer met een veerconstante k gekoppeld aan een slinger met een lengte 2l waar een massa m aan hangt (zie tekening). We beschouwen bewegingen in het vlak van de tekening, waarbij de uitwijking van de linker massa met x_1 en die van de rechter massa met x_2 wordt aangeduid.

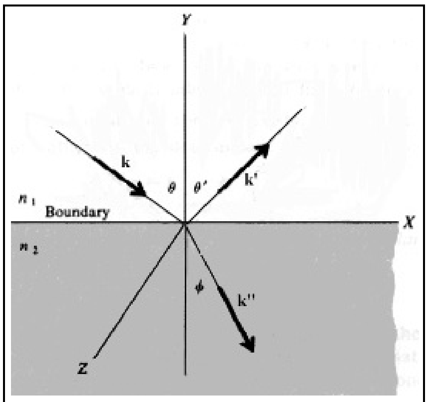
a. Stel voor elk van de massa's de differentiaalvergelijking voor de beweging op.

Gegeven is nu dat $\frac{g}{l} = 2\frac{k}{m}$.

b. Bereken de eigenfrequenties van dit systeem.

c. Bereken de verhouding van de amplitudes van de twee massa's voor elk van de eigentrillingen.

Vraagstuk 3

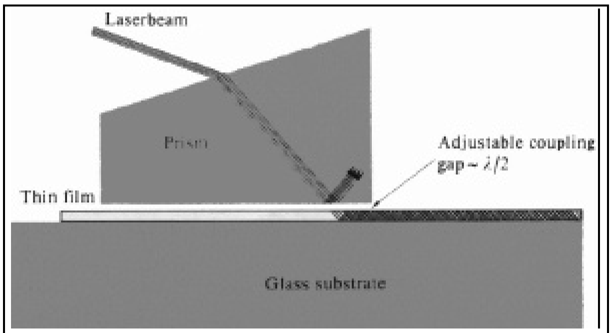


Figuur 3a

a. Leid af dat voor de breking aan een grensvlak tussen twee media met verschillende brekingsindices n_1 en n_2 geldt (gebruik de notaties uit Fig. 3a): $\frac{\sin q}{\sin f} = \frac{n_2}{n_1}$

Voor bepaalde applicaties (geïntegreerde optica) wil men een laserbundel (golflengte l) inkoppelen in een zeer dunne film (dikte ~ 250 nm) die als lichtgeleider werkt (zie Fig. 3b). Deze film heeft een brekingsindex n_f = $2n_0$ en is op een glassubstraat aangebracht met een brekingsindex n_g= $1.5n_0$, met n_0 de brekingsindex van de omgeving.

b. Laat zien dat het niet mogelijk is om de laserstraal direct (zonder het prisma) in de dunne film te koppelen, door de laserstraal simpelweg vanaf de zijkant op de dunne film te schijnen.



Figuur 3b

Om dit toch voor elkaar te krijgen is de opstelling van Fig. 3b bedacht. De laserstraal wordt zodanig op het prisma geschenen dat er totale interne reflectie optreedt. Buiten het grensvlak bevindt zich toch nog een electromagnetisch veld, dat de uitdovende golf genoemd wordt. Als nu het prisma op een zeer kleine afstand van de film gebracht wordt zal er een koppeling ontstaan waardoor de laserbundel vanuit het prisma wordt doorgegeven naar de film, zonder dat hij van richting verandert. In het onderstaande beschouwen we nu alleen het prisma en de uitdovende golf, de dunne film en het glassubstraat worden verder buiten beschouwing gelaten.

c. Laat zien dat voor de electrische vector van de uitdovende golf geldt:

$$\vec{E}_{uitdovend} = \vec{E}'' \cdot e^{-a|y|} \cdot e^{i(k_1 x - wt)} \quad \text{met } a = k'' \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 q}{n^2} - 1} \text{ en } k_1 = \frac{k'' \sin q}{n}$$

Ga hierbij uit van de golfvergelijking van een doorgelaten golf na een grensvlak:

$$\vec{E}_{transmitted} = \vec{E}'' \cdot e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - w\, t)}$$

d. Met welke factor is de intensiteit van de uitdovende golf afgenomen op een afstand $l/2$ van het vlak van het prisma indien $\frac{\sin q}{n} = 2$?

Vraagstuk 4

Beschouw het Fraunhofer-diffractiepatroon voor een 1-dimensionale apertuur met breedte *b* en apertuur-funktie *g*(*y*):

$$U(n) = \int_{-b/2}^{b/2} g(y)\, e^{iny}\, dy$$

We beschouwen het geval dat de apertuur-funktie *g*(*y*) beschreven wordt door een complexe e-macht:

$$\begin{aligned} g(y) &= e^{iF(y)} \quad \text{voor } -b/2 < y < b/2 \\ &= 0 \qquad\quad \text{elders} \end{aligned}$$

a. Beschrijf in woorden het effect van deze apertuur op het invallende licht.

b. Geef, voor de beschouwde klasse van funkties *g*(*y*), een uitdrukking voor de intensiteit van het diffractiepatroon in voorwaartse richting (*n* = 0) door de functie *g*(*y*) als de som van een reëel en een imaginair deel te schrijven.

c. Beredeneer dat de grootste intensiteit in de voorwaartse richting (nog steeds in de Fraunhofer benadering) wordt bereikt voor een functie *F*(*y*)=0.

d. Bereken *U*(*n*) voor *n* = 0 als *F*(*y*) =2*p y*/*b*. Geef een verklaring in woorden voor de uitkomst.